Edi Abdurachman[*]

Konsep Dasar Markov Chain serta Kemungkinan Penerapannya di Bidang Pertanian

Pendahuluan

Konsep dasar Markov Chain baru diperkenalkan sekitar tahun 1907, oleh seorang Matematisi Rusia Andrei A. Markov (1856-1922). Model ini berhubungan dengan suatu rangkaian proses dimana kejadian akibat suatu eksperimen hanya tergantung pada kejadian yang langsung mendahuluinya dan tidak tergantung pada rangkaian kejadian sebelum-sebelumnya yang lain.

Markov Chain bisa diterapkan diberbagai bidang antara lain ekonomi, politik, kependudukan, industri, pertanian dan lain-lain. Dalam tulisan ini mencoba menggali lebih jauh penerapannya untuk bidang pertanian. Sebelumnya terlebih dahulu dibahas konsep dasar dari Markov Chain (MC) itu sendiri.

Konsep Dasar Proses Markov Chain

Untuk memberikan dasar analisis aplikasi Markov Chain terlebih dahulu pada bagian ini akan digambarkan secara ringkas konsep dasar MC, mulai dari asumsi, definisi sampai pada beberapa theorema yang diperlukan untuk tujuan tersebut.

Apabila suatu kejadian tertentu dari suatu rangkaian eksperimen tergantung dari beberapa kemungkinan kejadian, maka rangkaian eksperimen tersebut disebut Proses Stokastik. Proses dikatakan terhingga (finite) apabila seluruh kemungkinan kejadian yang dapat terjadi, terhingga. Terdapat banyak tipe Proses Stokastik dan dikelompokkan berdasarkan sifat-sifat fungsi peluangnya.

---

[*] *Kepala Bidang Analisa dan Evaluasi, Pusat Penyiapan Program Penelitian*

Definisi :

Perhatikan suatu proses stokastik { X_n, n= 0,1,2,................. } Apabila X_n = i, maka proses dikatakan berada pada state-i. Misalkan apabila proses berada pada state-i maka akan berpindah ke state-j dengan peluang p_{ij}, dimana p_{ij} tidak tergantung pada n. Dengan perkataan lain, apabila

$$P\ (X_{n+1} = j\ /\ X_n=i,\ X_{n-1}=i_{n-i},.....,.....,X_1=i_1,\ X_0=i_0 \qquad (2.1)$$
$$= P\ (X_{n+1}=j\ /\ X_n=i) = pij\ ,$$

untuk semua state i_0, i_1,.........., i_{n-1}, i, j,, dan semua n ≥ 0.
Maka proses stokastik tersebut disebut Markov Chain Stationer.

Persamaan (2.1) dapat diinterpretasikan sebagai berikut :
Untuk suatu MC, peluang bersyarat kejadian yang akan datang X_{n+1}, hanya tergantung pada kejadian sekarang X_n. Hal ini disebut sifat Markovian. Karena peluang dimulai non-negatif dan proses harus melakukan transisi ke berbagai state, maka

$$pij\ \ \mu\ 0,\quad i,j\ \mu\ 0\ \ ;\ \sum_{j=1} pij = 1,\quad i=0,1,2,........$$

Untuk selanjutnya, mengingat aplikasi MC umumnya untuk state yang terhingga, maka pada tulisan ini hanya akan dibatasi pada MC stationer dengan state terhingga dan akan disebut MC saja untuk mempersingkat penulisannya.

Peluang transisi p_{ij} dapat dituliskan dalam bentuk matrik transisi P :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \ldots\ldots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} \ldots\ldots & p_{2r} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ p_{r1} & p_{r2} \ldots\ldots & p_{rr} \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

Karena unsur-unsur P adalah non-negatif dan jumlah peluang semua unsur pada setiap baris sama dengan 1, maka setiap baris adalah vektor peluang dan P adalah matrik stokastik. Matrik tersebut bersama state awal secara lengkap mendefinisikan suatu proses MC. Dengan perkataan lain, apabila informasi tersebut diketahui, kita dapat menentukan kejadian , misalkan, pada step yang ke n. Dalam bahasa matrik hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut. Misalkan $\mathbf{w}^0$ melambangkan vektor awal atau state awal, maka :

$$\mathbf{w}^0 P = \mathbf{w}^1$$
$$\mathbf{w}^1 P = \mathbf{w}^2$$

$$\mathbf{w}^{n-1} P = \mathbf{w}^n$$

atau (2.3)

$$\mathbf{w}^n = \mathbf{w}^0 P^n$$

Dengan demikian, apabila kita berawal pada state i, maka $\mathbf{w}^1$ adalah baris ke-i dari P, $\mathbf{w}^2$ adalah baris ke-i dari P^2, dan $\mathbf{w}^n$ adalah baris ke-i dari P^n. Baris-baris pada P^n, menyajikan vektor-vektor kejadian untuk berbagai state awal. Peluang p_{ij}^n adalah peluang dimana apabila dimulai pada state i proses akan berada pada state j setelah n step.

Sebuah state dikatakan *asesibel*, apabila terdapat peluang yang tidak nol untuk berpindah dari state i ke state j dalam periode waktu tertentu. MC yang demikian dikatakan *iredusibel*. Syarat cukup bagi P agar iredusibel adalah P^n hanya memiliki unsur-unsur yang positip. Apabila syarat ini dipenuhi, maka matrik transisi P mendefinisikan suatu proses MC *regular*.

Dalam kaitan dengan MC regular terdapat dua Theorema yang menyatakan eksistensi dan keunikan solusi pada tahap *equilibrium* (Ross, 1986).

Theorema 1 :

Jika P adalah matrik transisi MC regular, maka

a. P^n akan menuju sebuah matrik T, apabila $n \rightarrow \infty$
b. Setiap baris dari T sama yaitu berupa vektor peluang **w**
c. Semua elemen **w** adalah positip

Teorema 2 :

Apabila P adalah matrik transisi suatu MC regular dan T, w seperti pada theorema 1, maka vektor unik **w** adalah vektor peluang unik yang memiliki $\mathbf{w}P = \mathbf{w}$

Kedua theorema tersebut menyatakan bahwa kalau P adalah matrik MC regular, maka ada **w** yang sifatnya unik yang merupakan vektor peluang. Vektor peluang **w** tersebut tidak tergantung pada vektor awal. Dari theorema kita peroleh

$$\mathbf{w}P = \mathbf{w} \text{ atau}$$
$$\mathbf{w}(P\text{-}I) = 0 \qquad (2.4)$$

dimana (2.4) adalah r-1 persamaan yang saling bebas linier dengan r yang tidak diketahui. Karena w adalah vektor peluang, maka

$$\Sigma\, w_j = 1 \tag{2.5}$$

Dengan menggabungkan (2.4) dan (2.5) kita dapat mencari **w**, jika diketahui P.

Untuk melakukan estimasi p_{ij} dapat menggunakan metode kemungkinan maksimum (maximum likelihood estimation) berikut

$$p_{ij} = (a_{ij}) / (\sum_j a_{ij}) \tag{2.6}$$

dimana a_{ij} adalah banyaknya perpindahan dari state-i ke state-j pada periode pengamatan tertentu.

Penerapan di Bidang Pertanian

Aplikasi MC di bidang pertanian paling banyak di bidang sosial ekonomi. Sebagai state-nya antara lain adalah kelas besarnya industri pertanian, lokasi industri pertanian, struktur pasar, pertumbuhan ekonomi dan pembangunan pertanian. Pada tahun 1987 penulis telah mencoba menerapkan Markov Chain ini untuk memprediksi perubahan struktuir tata guna lahan di Pulau Jawa. Untuk beberapa ilustrasi aplikasi lainnya lihat Maki and Thompson (1978) dan Levin, at all (1992). Untuk lebih memperjelas aplikasi MC tersebut, akan diberikan ilustrasi pada perusahaan peternakan babi dari tulisan Judge dan Swanson (1981).

Dari suatu sentra produksi babi di negara bagian Illinois, USA, telah dipilih secara random 83 perusahaan yang bergerak pada komoditi tersebut. Setiap perusahaan tersebut dilihat perkembangan usahanya selama 13 tahun terakhir. Sebagai statenya adalah kelas perusahaan yang dikelompokkan berdasarkan banyaknya babi yang diproduksi seperti berikut:

State	Produksi per tahun (ekor)
1	0
2	1-20
3	21-40
4	41-60
5	61-80
6	81-100
7	> 1000

Selama 13 tahun pengamatan, setiap perusahaan akan berpindah-pindah sebanyak 12 kali dari satu state/kelas perusahaan yang satu ke state lainnya. Dengan demikian terdapat 83 x 12 = 996 perpindahan state selama 13 tahun periode pengamatan. Dengan menggunakan (2.6) diperoleh estimasi matrik P berikut :

$$P = \begin{pmatrix} .693 & .194 & .065 & .016 & 0 & .032 & 0 \\ .126 & .412 & .403 & .042 & .008 & 0 & .008 \\ .043 & .134 & .593 & .193 & .034 & .003 & 0 \\ .009 & .017 & .201 & .515 & .205 & .048 & .004 \\ .014 & .007 & .035 & .246 & .514 & .148 & .035 \\ .016 & .016 & .016 & .063 & .266 & .359 & .266 \\ .017 & .017 & 0 & .017 & .069 & .207 & .672 \end{pmatrix}$$

Matrik transisi itu sendiri dapat menggambarkan dinamika perusahaan dari aspek produksi. Misalkan, angka-angka pada diagonal utama menggambarkan adanya kecenderungan yang kuat bahwa dari suatu tahun ke tahun berikutnya, suatu perusahaan akan cenderung tetap pada kelas yang sama.

Hal ini dapat ditunjukkan bahwa peluang pada diagonal utama semuanya lebih besar dari peluang yang lainnya pada baris yang sama. Namun demikian, hal tersebut mungkin sebagian disebabkan oleh pengklasifikasian yang sembarang. Tentunya pengklasifikasian yang lebih banyak akan memberikan gambaran yang lebih baik. Hal lain yang dapat dilihat adalah kemungkinan peringkat kelasnya meningkat atau menurun dengan cara menjumlahkan semua peluang ke kanan (untuk yang meningkat) dan ke kiri (untuk yang menurun) dari diagonal utama. Contoh untuk yang distate-2, kelas produksi 1-20 ekor/tahun, peluang untuk meningkatnya lebih tinggi dibandingkan peluang untuk turun (0.461 dibandingkan dengan 0.126)

Dari matrik transisi itu juga dapat dilihat bahwa peluang yang terbesar, selain yang tetap di kelas yang sama, adalah perusahaan yang peringkatnya naik atau turun satu kelas. Perpindahan dari kelas tidak berproduksi (state-1) ke kelas yang lainnya didominasi oleh kelompok kelas 1-40 ekor (state 2 dan 3). Peluang untuk menjadi tidak berproduksi juga secara umum lebih besar untuk kelompok kelas produksi kecil.

Dengan matrik transisi P di atas dan dengan menggunakan (2.4) dan (2.5) kita peroleh vektor distribusi ukuran perusahaan pada kondisi ekuilibrium :

$$\mathbf{w} = (.098 \quad .099 \quad .234 \quad .207 \quad .170 \quad .093 \quad .099)$$

Keadaan ekuilibrium ini tidak berarti tidak adanya perpindahan dari suatu state ke state lainnya, akan tetapi menggambarkan suatu kondisi dimana banyaknya yang masuk ke suatu state kira-kira seimbang dengan banyaknya yang keluar dari state tersebut. Vektor **w** dapat dibandingkan dengan keadaan asal

	State						
	1	2	3	4	5	6	7
Ekuilibrium	.098	.099	.234	.207	.170	.093	.099
Asal	.074	.116	.306	.230	.148	.066	.060

Pada kondisi ekuilibrium, sekitar 9,8%, perusahaan tidak akan berproduksi. Hal ini meningkat dibandingkan keadaan semula yang hanya 7,4%. Peningkatan ini juga terjadi untuk state 5, 6, 7 atau kelompok perusahaan dengan tingkat produksi lebih dari 60 ekor/tahun. Penurunan terjadi untuk kelompok kelas perusahaan state 2, 3, dan 4.

Dengan diketahui matrik P dan digandakan beberapa kali, berdasarkan vektor awal kita dapat memprediksi vektor pada tahun ke-n dengan menggunakan (2.3). Unsur P^n yaitu p_{ij}^n adalah peluang dimana proses akan berada pada state-j setelah n-step, apabila dimulai dari state-i.

Dengan membandingkan P^n dan T yang setiap barisnya adalah w, maka dapat diperoleh setelah berapa lama akan mencapai ekuilibrium. Pada kasus data kita n = 18 atau setelah 18 tahun akan diperoleh kondisi ekuilibrium.

Penutup

Dengan ilustrasi perusahaan babi di atas, diharapkan dapat memberikan gambaran untuk dapat diterapkan untuk aplikasi lainnya di bidang pertanian. Secara umum, karakteristik apa saja sepanjang dapat dikualifikasikan dan memenuhi persyaratan Markov Chain, maka dapat dilakukan analisis dengan model tersebut. Dalam contoh diatas adalah besarnya produksi babi. Analisis dapat diperluas atau dikombinasikan dengan produksi jenis-jenis komoditas lainnya. Demikian pula dapat dilakukan untuk industri pertanian lainnya. Tentunya pembaca dapat memikirkan aplikasi yang lainnya.

Perlu dicatat bahwa analisis dengan model MC sangat memerlukan data. Sebagai contoh dalam analisis perusahaan ilustrasi diatas, kita memerlukan informasi yang lengkap secara mikro dari perusahaan sample sepanjang periode pengamatan. Dengan demikian ketersediaan data adalah salah satu kemungkinan penyebab kesulitan analisis dengan model MC ini.

Daftar Pustaka

Judge, G.G. and E.R. Swanson, 1981. *Markos Chains : Basic Concepts and Suggested Uses in Agricultural Economics*. Journal of the American Statistical Association.

Levin, R.I., D.S. Rubin, J.P.Stinson, and E.S. Gardner. 1992. *Quantitative Approaches to Management*. Mc. Grow Hill Book Co.

Maki, D.P and M. Thompson. 1978. *Finite Mathematics*. Mc Graw Hill Book Company.

Ross, S.M. 1986. *Stochastic Processes*. John Wiley and Sons. Inc. Canada.